試し読み（抜粋）

合格答案をつくる　芝浦工大数学　２０２７

このファイルは、書籍の内容を確認していただくための抜粋です。
扉・問題・解答などを、それぞれ別の箇所から抜き出して並べています。
連続したページではありません。

書籍でのページ番号は、各ページの下部または上部にあります。
扉のように番号の入らないページもあります。
収録順や前後のつながりは、実際の書籍とは異なります。

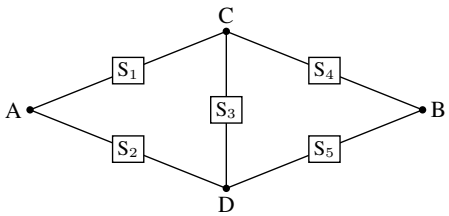
1. 次の［　　］に適する解答を所定の解答欄に記入せよ。

(1) 6 人の生徒の数学の得点の平均値は 5 点，分散は 3 であった。ここに新たに 2 人の生徒の得点 a 点，b 点 $(a < b)$ を加えたところ，8 人の得点の平均値は 5.5 点，分散は 4 となった。このとき，$(a, b) =$［(ア)］である。さらにもう 1 人の生徒の得点 c 点を加えて 9 人の得点とするとき，その分散が 4 以下となるような整数 c の個数は［(イ)］である。

(2) a を定数とする。θ についての方程式 $\sin 3\theta \sin\theta = a$ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲に異なる 4 個の解をもつような a の値の範囲は［(ウ)］である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$，$na_{n+1} = (3n+4)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定め，初項から第 n 項までの和を $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。このとき，$S_n =$［(エ)］であり，一般項は $a_n =$［(オ)］である。

2. 下の図のように，5 個のスイッチ S_1，S_2，S_3，S_4，S_5 をつないだ回路がある。S_1 は A と C，S_2 は A と D，S_3 は C と D，S_4 は C と B，S_5 は D と B の間にある。各スイッチは，ほかのスイッチとは無関係に，確率 p で閉じ（電流を通し），確率 $1-p$ で開いている（電流を通さない）。ただし，$0 < p < 1$ とする。端子 A から端子 B まで，閉じたスイッチだけを通ってたどれるとき，A から B へ電流が流れるという。A から B へ電流が流れる確率を $R(p)$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) スイッチ S_3 が開いているとき，A から B へ電流が流れる条件付き確率を p を用いて表せ。

(2) $R(p)$ を p の整式で表せ。

(3) (1) で求めた条件付き確率を $q(p)$ とする。$q(p)$ は，スイッチ S_3 を取り除いた回路で A から B へ電流が流れる確率でもある。S_3 を加えたことによる確率の増加分 $R(p) - q(p)$ が最大となる p の値と，その最大値を求めよ。

3. 次の［　　］に適する解答を所定の解答欄に記入せよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$ を満たすとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は［(ア)］である。また，実数 s，t が $s^2+t^2=1$ を満たして動くとき，$|s\vec{a}+t\vec{b}|$ の最大値は［(イ)］である。

(2) 自然数を 5 進法で表したときの各位の数字の和を考える。たとえば $2027=31102_{(5)}$ の各位の数字の和は $3+1+1+0+2=7$ である。5 進法で表したときの各位の数字の和が 30 となる自然数のうち，小さい方から 2 番目のものを 10 進法で表すと［(ウ)］である。

(3) a を定数とする。x の 3 次方程式 $x^3+3x^2-24x+a=0$ が異なる 2 つの正の解と 1 つの負の解をもつような a の値の範囲は［(エ)］である。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}e^{\frac{k^2}{n^2}}$ の値は［(オ)］である。ただし，e は自然対数の底とする。

4. 座標平面上の円 $x^2+y^2=4$ を C，曲線 $xy=1$ $(x>0)$ を H とする。また，連立不等式

$$x^2+y^2\leqq 4,\qquad xy\geqq 1,\qquad x>0$$

の表す領域を D とする。ただし，$\log x$ は x の自然対数とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) C と H の交点の座標をすべて求めよ。

(2) D の面積 S を求めよ。

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

3. 次の［　　］に適する解答を所定の解答欄に記入せよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1) ある 20 人の生徒について，数学の得点 x と英語の得点 y を調べた。x の分散は 4 であった。また，生徒ごとに 2 科目の得点の和 $x+y$ と差 $x-y$ を計算すると，変量 $x+y$ の分散は 17，変量 $x-y$ の分散は 9 であった。このとき，x と y の相関係数は［(ア)］である。さらに，k を定数とし，生徒ごとに $z=y-kx$ を計算して変量 z を作る。k をいろいろに変えるとき，z の分散の最小値は［(イ)］である。

(2) $2^{2027}+3^{2027}$ を 91 で割ったときの余りは［(ウ)］である。

(3) 数列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，$\cdots\cdots$ は，自然数 k が k 個ずつ小さい順に並んだものである。この数列の初項から第 n 項までの和が初めて 1000 を超えるのは $n=$［(エ)］のときである。

(4) $x>0$ で定義された関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\log t}{t^2}\,dt$ の最大値は［(オ)］である。

4. a を $0<a<\pi$ を満たす定数とする。座標平面上で，曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ を C とし，C を x 軸方向に a だけ平行移動した曲線 $y=\sin(x-a)\ (a\leqq x\leqq\pi+a)$ を C_a とする。また，C，C_a および 2 直線 $x=a$，$x=\pi$ で囲まれた 2 つの部分を合わせた図形を D とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) C と C_a の共有点の座標を a を用いて表せ。

(2) D の面積 $S(a)$ を a を用いて表せ。また，a が $0<a<\pi$ の範囲で変化するときの $S(a)$ の最大値を求めよ。

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(a)$ を a を用いて表せ。また，a が $0<a<\pi$ の範囲で変化するときの $V(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

第 3 回 解答・解説

大問 1 —— 相加・相乗平均／数字の大小の条件／対数の最大

(1)　積のままでは最小値の見当がつかないので，まず展開する。4 つの積を順に計算すると

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(2x+\frac{9}{x}\right)=x\cdot 2x+x\cdot\frac{9}{x}+\frac{4}{x}\cdot 2x+\frac{4}{x}\cdot\frac{9}{x}=2x^2+9+8+\frac{36}{x^2}=2x^2+\frac{36}{x^2}+17$$

である。展開したことで，x^2 と $\dfrac{1}{x^2}$ の項の積 $2x^2\cdot\dfrac{36}{x^2}=72$ が x によらない定数になった。積が一定の 2 つの正の数の和は，相加平均と相乗平均の関係で下から押さえられる。

$x>0$ より $2x^2>0$，$\dfrac{36}{x^2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$2x^2+\frac{36}{x^2}\geqq 2\sqrt{2x^2\cdot\frac{36}{x^2}}=2\sqrt{72}=2\cdot 6\sqrt{2}=12\sqrt{2}$$

である。等号は $2x^2=\dfrac{36}{x^2}$，すなわち $x^4=18$ のときに成り立ち，$x>0$ の範囲に $x=\sqrt[4]{18}$ という解が実際にある。したがって $12\sqrt{2}$ は下限であるだけでなく実際にとる値であり，最小値は $17+12\sqrt{2}$ である。

答：　(ア)　$\underline{\underline{17+12\sqrt{2}}}$

実際に $x=\sqrt[4]{18}$ のとき $x^2=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ であるから，$2x^2=6\sqrt{2}$，$\dfrac{36}{x^2}=\dfrac{36}{3\sqrt{2}}=\dfrac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ となって 2 つの項が等しく，和は $12\sqrt{2}$ になることが確かめられる。

注 意

$x+\dfrac{4}{x}\geqq 4$，$2x+\dfrac{9}{x}\geqq 6\sqrt{2}$ を掛けて「最小値 $24\sqrt{2}$」とするのは誤りである。前者の等号は $x^2=4$ のとき，後者の等号は $2x^2=9$ のときで，同時には成り立たないから，$24\sqrt{2}$ という値は実際にはとらない。実際，$24\sqrt{2}\fallingdotseq 33.94$ に対し $17+12\sqrt{2}\fallingdotseq 33.97$ であり，$24\sqrt{2}$ は真の最小値より小さい。相加平均と相乗平均の関係を使うときは，$\underline{\text{等号が成り立つ } x \text{ が実在するか}}$を必ず確かめる。

(2)　3 桁の自然数の百の位，十の位，一の位の数字を順に a，b，c とする。a は 1 から 9 まで，b，c は 0 から 9 までの整数である。条件は「$b>a$ かつ $b>c$」であり，a と c はどちらも b だけと比べられ，a と c の間