試し読み（抜粋）

合格答案をつくる　同志社大数学　２０２７

このファイルは、書籍の内容を確認していただくための抜粋です。
扉・問題・解答などを、それぞれ別の箇所から抜き出して並べています。
連続したページではありません。

書籍でのページ番号は、各ページの下部または上部にあります。
扉のように番号の入らないページもあります。
収録順や前後のつながりは、実際の書籍とは異なります。

〔Ⅰ〕次の［　　］に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた［　　］の中に記入せよ．

(1) 3 枚のカード A，B，C が，上から A，B，C の順に 1 つの山に重ねてある．「山のいちばん上のカードを取り，残り 2 枚の山の，いちばん上，2 枚の間，いちばん下の 3 か所のうちの 1 か所を等しい確率で選んで差し込む」という操作をくり返す．2 回の操作のあと，C がいちばん上にある確率は［ア］，C がいちばん下にある確率は［イ］である．n を自然数とする．n 回の操作のあと，C が上から 2 枚目にある確率は n によらず［ウ］であり，C がいちばん下にある確率は［エ］である．また，1 回目から n 回目までのどの操作のあとにも C がいちばん上にない確率は［オ］である．

(2) i を虚数単位とする．0 でない複素数 z に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする．点 z が虚部が 1 である複素数全体の表す直線上を動くとき，点 w は中心［カ］，半径［キ］の円から原点を除いた図形を描く．点 z がこの直線上を $|z| \leqq 2$ の範囲で動くとき，点 w が描く曲線の長さは［ク］である．点 z がこの直線上を動くとき，$|w-1|$ の最大値は［ケ］である．また，点 z が，実部が 0 以上 1 以下で虚部が 1 以上の複素数全体を動くとき，点 w が動く範囲の面積は［コ］である．

〔Ⅱ〕正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が，すべての自然数 n について

$$a_1a_n+a_2a_{n-1}+a_3a_{n-2}+\cdots+a_na_1=\frac{n(2n^2+1)}{3}$$

をみたしている．また，数列 $\{b_n\}$ を，すべての自然数 n について

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\cdots+a_nb_1=1$$

が成り立つように定め，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とする．次の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2n-2k+1)$ を n の式で表せ．

(3) すべての自然数 n について $a_n=2n-1$ であることを，数学的帰納法を用いて示せ．

(4) すべての自然数 n について $b_{n+1}=-2S_n$ が成り立つことを示せ．

(5) b_n を n の式で表せ．

〔Ⅲ〕xy 平面上の楕円 $E:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ の焦点のうち x 座標が正のものを F とし，A(3, 0)，A′(−3, 0) とする．E 上の点 P(p, q)（$q>0$）における E の接線が，直線 $x=3$，$x=-3$ と交わる点をそれぞれ R，R′ とする．次の問いに答えよ．

(1) F の座標を求めよ．また，R，R′ の y 座標を p，q を用いて表し，積 AR · A′R′ の値を求めよ．

(2) ∠RFR′ の大きさを求めよ．

(3) P が E の $q>0$ の部分を動くとき，△RFR′ の面積の最小値と，そのときの P の座標を求めよ．

(4) P が E の $q>0$ の部分を動くとき，四角形 AA′R′R の面積の最小値と，そのときの P の座標を求めよ．また，そのときの △RFR′ の面積と (3) の最小値を比べよ．

〔Ⅳ〕a を $a>\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)=a\cos x+\dfrac{x^2}{2}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)=0$ を満たす x は $0<x<\pi$ の範囲にただ 1 つあることを示せ．また，その x を α とするとき，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であることを示せ．

(2) 極限 $\lim\limits_{a\to\infty} a(\pi-\alpha)$ を求めよ．

(3) n を自然数とし，$a=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ とする．$f(x)$ が極値をとる x の個数を求めよ．

(4) (3) のとき，$f(x)$ が極値をとる x のうち最大のものを求め，そこでの極値が極大値か極小値かを答えよ．また，2 番目に大きいものを β_n とするとき，$a-\dfrac{\pi}{2}<\beta_n<a$ であることを示せ．

(5) $a_n=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ とおく．極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(a_n-\beta_n)$ を求めよ．

〔Ⅲ〕座標平面上で，連立不等式 $x^2 \leqq y \leqq 1$ の表す領域を R とする。実数 p，q に対して，R の点 $(x,\ y)$ のうち，不等式

$$|x+y-p-q| \geqq |x-p|+|y-q|$$

をみたすもの全体からなる図形の面積を $S(p,\ q)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 実数 X，Y について，$|X+Y| \geqq |X|+|Y|$ が成り立つための必要十分条件を，積 XY を用いて表せ。

(2) $p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{4}$ のとき，R の点のうち上の不等式をみたすもの全体を図示せよ。

(3) $0 \leqq a \leqq 1$ とする。$S(a,\ a^2)$ を a を用いて表し，$S(a,\ a^2)$ の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(4) $0 \leqq p \leqq \sqrt{q} \leqq 1$ のとき，$S(p,\ q)$ を p，q を用いて表せ。ただし，結果は $\sqrt{q}$ を含まない式になる。

(5) 点 $(p,\ q)$ が，R の点のうち $p \geqq 0$ をみたすもの全体を動くとき，$S(p,\ q)$ の最小値を求めよ。

第 3 回 文系 解答・解説

▪〔 I 〕小問集合

〔 I 〕50 点（各 5 点）

ア	$\dfrac{18}{5}$	カ	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$
イ	5	キ	8
ウ	$\dfrac{9}{10}$	ク	$(-9,\ 15)$
エ	$8x^3+6x^2-6x-3$	ケ	$\dfrac{(3n-2)\cdot 4^n+2}{3}$
オ	$-\dfrac{5(1+\sqrt{5})}{4}$	コ	$\dfrac{6}{7}$

(1) 生徒①〜⑤の得点を $(x_i,\ y_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ と書く。x の平均値は 3 であり，共分散は $\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)(y_i-\overline{y})$ である。$\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)=0$ であるから $\overline{y}$ の項は消えて，共分散は $\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)y_i$ に等しい。しかも③の生徒は $x_3-3=0$ なので a が掛かる項も消え，

$$\frac{1}{5}\{(-2)\cdot 1+(-1)\cdot 3+0\cdot a+1\cdot 9+2\cdot 7\}=\frac{18}{5}$$

となる。よって ア $=\underline{\underline{\dfrac{18}{5}}}$ である。

次に，y の平均値は $\dfrac{20+a}{5}$，y^2 の平均値は $\dfrac{140+a^2}{5}$ であるから，y の分散は

$$\frac{140+a^2}{5}-\left(\frac{20+a}{5}\right)^2=\frac{4a^2-40a+300}{25}=\frac{4(a-5)^2+200}{25}$$

であり，$a=5$ のとき最小値 8 をとる。よって イ $=\underline{\underline{5}}$ である。x の分散は $\dfrac{4+1+0+1+4}{5}=2$ であるから，相関係数は $\dfrac{18/5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=\dfrac{18}{5\cdot 4}$ より ウ $=\underline{\underline{\dfrac{9}{10}}}$ である。

(2) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ を代入すると エ $=\underline{\underline{8x^3+6x^2-6x-3}}$ となる。これを $g(x)$ とおく。$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $x=\cos\theta$ は $-1\leqq x\leqq 1$ の値をちょうど 1 回ずつとるから，$-1\leqq x\leqq 1$ における $g(x)$ の最小値を求めればよい。$g'(x)=6(4x^2+2x-1)$ であり，$4x^2+2x-1=0$ の解