試し読み（抜粋）

合格答案をつくる　日本医科大数学　２０２７

このファイルは、書籍の内容を確認していただくための抜粋です。
扉・問題・解答などを、それぞれ別の箇所から抜き出して並べています。
連続したページではありません。

書籍でのページ番号は、各ページの下部または上部にあります。
扉のように番号の入らないページもあります。
収録順や前後のつながりは、実際の書籍とは異なります。

[Ⅰ] 実数 p, q に対して

$$F(p,\,q)=\int_0^1 \left(x-p-q\sqrt{x}\,\right)^2 dx$$

とおく。以下の各問いの空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。ただし，分数は既約分数で答えること。

問 1 $F(p,\,q)$ を展開して整理すると

$$F(p,\,q)=p^2+\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}pq+\frac{1}{2}q^2-p-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}q+\frac{1}{3}$$

となる。

問 2 p, q が実数全体を動くとき，$F(p,\,q)$ は $p=-\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$q=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき最小となり，その最小値は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。また，p, q をこの値とするとき，曲線 $y=p+q\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ の 2 つの共有点の x 座標は

$$x=\frac{\boxed{サ}\pm\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$$

である。ただし，$\boxed{ス}$ はできるだけ小さくし，$\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$, $\boxed{セ}$ の最大公約数は 1 とする。

問 3 $p+q=1$ とする。すなわち，曲線 $y=p+q\sqrt{x}$ が点 $(1,\,1)$ を通るとする。このとき $F(p,\,q)$ は $q=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ のとき最小となり，その最小値は $\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。

[IV] $-1 < x < 1$ で定義された，正の値をとる連続関数 $f(x)$ が，$-1 < x < 1$ を満たすすべての実数 x に対して

$$f(x) = 1 + \int_0^x t\left\{f(t)\right\}^3 dt$$

を満たすとする。曲線 $y = f(x)$ $(-1 < x < 1)$ を C とする。以下の各問いに答えよ。

問 1 $f(0)$ の値を求めよ。また，導関数 $f'(x)$ を x と $f(x)$ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2 関数 $\dfrac{1}{\left\{f(x)\right\}^2}$ の導関数を求めることにより，$f(x)$ を求めよ。

問 3 $0 < a < 1$ とする。曲線 C と直線 $y = f(a)$ で囲まれた部分の面積を $U(a)$ とする。$a = \sin\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくとき，$U(a)$ を θ を用いて表せ。答えのみでよい。

問 4 極限 $\lim\limits_{a \to +0} \dfrac{U(a)}{a^3}$ を求めよ。

[III] O を原点とする座標平面上に，放物線

$$C:\ y^2 = 4x$$

がある。C の焦点を F，準線を d とする。$t > 0$ とし，点 P$(t^2,\ 2t)$ における C の接線を ℓ，法線を m とする。さらに，ℓ，m が d と交わる点をそれぞれ U，W とする。以下の各問いに答えよ。

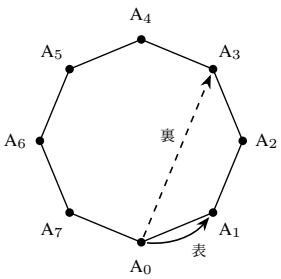
問 1　直線 ℓ，m の方程式を求めよ。また，U，W の座標をそれぞれ t を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　$\angle$PFU $= 90^\circ$ であることを示せ。また，三角形 PFU の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)$ を最小にする t の値と，$S(t)$ の最小値を求めよ。

問 3　三角形 PUW の面積を $T(t)$ とする。$T(t)$ を最小にする t の値と，$T(t)$ の最小値を求めよ。また，直線 PF は三角形 PUW の外接円に点 P で接することを示せ。

第 3 回 解答・解説

▪〔I〕—— 正八角形の頂点を 1 つ先・3 つ先へ進む点



表は $+1$，裏は $+3$。k 回のうち裏が t 回なら，進んだ数は $(k-t)+3t=k+2t$ である。

頂点の添字は 8 で割った余りで考える（$\mathrm{A}_8=\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_9=\mathrm{A}_1, \cdots$）。まず，P の位置を裏の回数で表しておく。$k$ 回投げて裏が t 回出たとき，P は反時計回りに $(k-t)\cdot 1+t\cdot 3=k+2t$ だけ進むから

$$\mathrm{P}_k=\mathrm{A}_{k+2t}$$

である。したがって

$$\mathrm{P}_k=\mathrm{A}_0 \iff k+2t\equiv 0 \pmod 8$$

であり，確率の問題が「裏の回数 t についての合同式」に置きかわる。また，$k+2t$ と k の偶奇は一致するから，奇数回目には P は必ず奇数番の頂点にいる。以下の各問ではこの 2 つの事実を使う。

問 1　$4+2t\equiv 0 \pmod 8$，$0\leqq t\leqq 4$ をみたす t を求める。$2t\equiv 4 \pmod 8$ より $t\equiv 2 \pmod 4$ であり，$0\leqq t\leqq 4$ では $t=2$ のみである。4 回のうち裏がちょうど 2 回出る確率は

$$_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

である。

答：　$\dfrac{3}{8}$　　（ア $=3$, イ $=8$）