試し読み（抜粋）

合格答案をつくる　東大理系数学　２０２７　Ｖｏｌ．４

このファイルは、書籍の内容を確認していただくための抜粋です。
扉・問題・解答などを、それぞれ別の箇所から抜き出して並べています。
連続したページではありません。

書籍でのページ番号は、各ページの下部または上部にあります。
扉のように番号の入らないページもあります。
収録順や前後のつながりは、実際の書籍とは異なります。

入 学 試 験 問 題 前

数　学（理科）

（配点 120 点）

第 2 回 予想問題　　150 分

注　意　事　項

1 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。

2 問題は第 1 問から第 6 問までの 6 題です。すべてに解答しなさい。

3 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。

4 2 枚の解答用紙を使うつもりで，第 1 問〜第 3 問と第 4 問〜第 6 問に分けて解答しなさい。解答は大問ごとに独立した欄に書き，欄外にはみ出さないこと。

5 **答えだけを書いた答案には点を与えません。**結論に至る過程を筋道立てて記述しなさい。

6 問題紙の余白は，計算用に使用してもかまいません。

7 本書は市販の予想問題集であり，試験時間 150 分・配点 120 点は本番と同じに設定してあります。

本書は独自作成の**非公式**予想問題集であり，東京大学公式の教材・過去問・模擬試験ではない。

第　6　問

n を正の整数とし，$\theta = \dfrac{\pi}{4n}$ とおく。

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\cos k\theta \, \cos(k+1)\theta}$$

とする。

(1) x が $x \geqq 0$ かつ $x + \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたすとき

$$\tan(x+\theta) - \tan x = \frac{\sin\theta}{\cos x \, \cos(x+\theta)}$$

が成り立つことを示せ。

(2) T_n を n を用いて表せ。

(3) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{n}$ を求めよ。

第　5　問

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{a_{n-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

で定める。

(1) $n \geqq 2$ のとき $a_{n+1} + a_{n-1} = 4a_n$ が成り立つことを示せ。また，すべての正の整数 n に対し a_n は正の整数であることを示せ。

(2) すべての正の整数 n に対し，a_n と a_{n+1} は互いに素であることを示せ。

第 3 回 解答・解説

▪ 第 1 問 —— $e^{-n\sin x}$ の積分の減り方

I_n は $n\to\infty$ で 0 に収束するが，本問が問うのはどれくらいの速さで 0 になるかである。被積分関数は x が 0 に近いところだけが効く。実際 $\sin x \fallingdotseq x$ だから $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx}dx = \frac{1-e^{-n}}{n}$ で，n が大きいと $\dfrac{1}{n}$ に近い——これが答の見当になる。これを厳密にするために，$x=0$ の近くとそれ以外に分けて評価する。

(1) まず右側の $\sin x \leqq x$ を示す。$g(x)=x-\sin x$ とおくと $g'(x)=1-\cos x\geqq 0$ だから g は増加し，$g(0)=0$ より $x\geqq 0$ で $g(x)\geqq 0$，すなわち $\sin x\leqq x$ である。

つぎに左側の $\dfrac{2}{\pi}x\leqq \sin x$ を示す。$h(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$ とおくと $h(0)=0$，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-1=0$ である。また

$$h'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$$

であり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $\cos x$ は減少するから h' も減少する。$h'(0)=1-\dfrac{2}{\pi}>0$，$h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}<0$ だから，$h'(x)=0$ となる $x=x_0$ がただ 1 つあり，h は $0\leqq x\leqq x_0$ で増加，$x_0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で減少する。よって h の最小値は両端でとり，どちらも 0 であるから，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $h(x)\geqq 0$ である。 ■

(2) この不等式を使って積分を評価する。$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $\sin x$ は増加するから，$\delta\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $\sin x\geqq\sin\delta$ である。さらに (1) より $\sin\delta\geqq\dfrac{2}{\pi}\delta$ だから

$$e^{-n\sin x}\leqq e^{-n\sin\delta}\leqq e^{-\frac{2n\delta}{\pi}}$$

である。区間の長さは $\dfrac{\pi}{2}-\delta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}dx\leqq\frac{\pi}{2}e^{-\frac{2n\delta}{\pi}}$$

が成り立つ。 ■

最後に極限を求める。まず $u\geqq 0$ で $e^u\geqq\dfrac{u^3}{6}$ を示す。$F(u)=e^u-\dfrac{u^3}{6}$ とおくと

$$F'(u)=e^u-\frac{u^2}{2},\qquad F''(u)=e^u-u,\qquad F'''(u)=e^u-1$$

である。$u\geqq 0$ で $F'''(u)\geqq 0$ だから F'' は増加し，$F''(0)=1>0$ より $F''>0$。よって F' は増加し，$F'(0)=1>0$ より $F'>0$。よって F は増加し，$F(0)=1>0$ より $F>0$ である。

したがって $t>0$，$c>0$ のとき $e^{ct}\geqq\dfrac{(ct)^3}{6}$ であるから

$$0<t^2e^{-ct}=\frac{t^2}{e^{ct}}\leqq\frac{6t^2}{c^3t^3}=\frac{6}{c^3t}$$

となる。$t\to\infty$ で右辺は 0 に収束するから，はさみうちの原理により $\lim\limits_{t\to\infty}t^2e^{-ct}=0$ である。 ■