試し読み（抜粋）

過去問の前に　東大理系数学　２０２７年度対策

このファイルは、書籍の内容を確認していただくための抜粋です。
扉・問題・解答などを、それぞれ別の箇所から抜き出して並べています。
連続したページではありません。

書籍でのページ番号は、各ページの下部または上部にあります。
扉のように番号の入らないページもあります。
収録順や前後のつながりは、実際の書籍とは異なります。

第 2 章

整 数

数学 A ― 余りで分類し，大きさではさみ，十分性を書く

この分野で東大が要求すること

整数は東大の**最頻出分野**である。2019 年度から 2026 年度までの 8 年で 7 回，ほぼ毎年出ている（出なかったのは 2023 年度のみ）。しかも設問の型がはっきりしている。

- 「**示せ**」と「**すべて求めよ**」がほとんどを占める。2019 年度第 4 問「2 乗にならないことを示せ」，2024 年度第 6 問「素数となる n をすべて求めよ・3 個以下であることを示せ」，2025 年度第 4 問「2 条件が同値であることを示せ」，2026 年度第 6 問「$f(n) \geqq g(n)$ を示せ・とりうる値を求めよ」
- 道具は合同式・素因数分解・二項定理の 3 つでほぼ足りる。特別な定理は要らない
- 「すべて求めよ」では十分性（逆の確認）を書かないと大きく減点される。必要条件で候補を絞ったところで答案は半分である

本章は数学 A の範囲だけで解ける 4 題である。2-4 だけは整式を扱うが，微分も極限も使わない。

この章の問題

2-1	標準	$2^n + 3^n$ は 5 で何回割れるか	25 分
2-2	やや難	平方数である約数はいくつあるか	30 分
2-3	やや難	$1^m + \cdots + (p-1)^m$ を p で割る	30 分
2-4	本番接続	整数値をとる整式	40 分

右のページが**この章の確認事項**である。解く前に目を通し，解いたあとにもう一度戻ること。

4-3　やや難　正四面体の対辺を結ぶ線分の中点

目標 **30** 分

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，点 P は辺 AB 上を，点 Q は辺 CD 上を動く（端点にあってもよい）。線分 PQ の中点を M とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$（$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$）とおくとき，$\mathrm{PQ}^2$ を s，t で表せ。

(3) 線分 PQ の長さのとりうる値の範囲を求めよ。

(4) 点 M の動く範囲は正方形であることを示し，その正方形の面積を求めよ。

▷ **ヒント**　$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと，これらは大きさ 1 でどの 2 つの内積も $\frac{1}{2}$ である。(4) では $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $s-\frac{1}{2}$ と $t-\frac{1}{2}$ の式に整理せよ。

4-4　本番接続　単位ベクトルのなす角

目標 **35** 分

n を 2 以上の整数とし，$\vec{a_1},\vec{a_2},\dots,\vec{a_n}$ を座標空間の大きさ 1 のベクトルとする。以下の問いに答えよ。

(1) $1\leqq i<j\leqq n$ をみたすすべての組 (i,j) について内積 $\vec{a_i}\cdot\vec{a_j}$ を作り，それらをすべて加えたものを S とおく。等式

$$|\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_n}|^2=n+2S$$

が成り立つことを示せ。またこれを用いて $S\geqq -\dfrac{n}{2}$ を示せ。

(2) どの 2 つの内積も $-\dfrac{1}{3}$ 以下，すなわち $\vec{a_i}\cdot\vec{a_j}\leqq -\dfrac{1}{3}$（$i\neq j$）が成り立つならば，$n\leqq 4$ であることを示せ。

(3) (2) の条件のもとで $n=4$ であるとする。このとき，どの 2 つの内積もちょうど $-\dfrac{1}{3}$ に等しく，さらに $\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}+\vec{a_4}=\vec{0}$ であることを示せ。

(4) (2) の条件をみたす 4 つのベクトルの組を 1 つ具体的に挙げよ。またそのとき，原点を始点とする 4 つのベクトルの終点は正四面体の 4 頂点をなすことを示せ。

▷ **ヒント**　(1) は $|\vec{x}|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}$ を展開するだけである。(3) では，(1) の不等式と (2) の仮定を突き合わせると等号がすべて成立せざるをえないことに注目せよ。

5-3　本番接続　正三角形の条件とナポレオンの定理

目標 **40** 分

$\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\omega^3 = 1$ および $1+\omega+\omega^2 = 0$ が成り立つことを示せ。また，相異なる 3 つの複素数 α，β，γ が $\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma = 0$ をみたすならば，3 点 α，β，γ を頂点とする三角形は正三角形であることを示せ。

(2) 相異なる 2 つの複素数 α，β に対し，$\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma = 0$ をみたす複素数 γ を α，β で表せ。

(3) 複素数 a，b，c に対し

$$a' = -\omega c - \omega^2 b, \qquad b' = -\omega a - \omega^2 c, \qquad c' = -\omega b - \omega^2 a$$

とおき，さらに

$$g_a = \frac{b+c+a'}{3}, \qquad g_b = \frac{c+a+b'}{3}, \qquad g_c = \frac{a+b+c'}{3}$$

とおく。このとき $g_a + \omega g_b + \omega^2 g_c = 0$ が成り立つことを示せ。

(4) $g_a+g_b+g_c = a+b+c$ が成り立つことを示せ。また，$a'' = -\omega b - \omega^2 c$，$b'' = -\omega c - \omega^2 a$，$c'' = -\omega a - \omega^2 b$ とおき，$h_a = \dfrac{b+c+a''}{3}$，$h_b = \dfrac{c+a+b''}{3}$，$h_c = \dfrac{a+b+c''}{3}$ と定めるとき，$h_a + \omega^2 h_b + \omega h_c = 0$ および $h_a + h_b + h_c = a+b+c$ が成り立つことを示せ。

▷ **ヒント**　(3)(4) は $p = 1-\omega^2$，$q = 1-\omega$ とおいて g_a などを a，b，c の 1 次式に整理し，a，b，c の係数がそれぞれ 0 になることを確かめればよい。

第 3 章　領域と図示　解答・解説

3-1　標準　放物線の 2 接線の交点

問題　放物線 $C : y = x^2$ 上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}(p, p^2)$，$\mathrm{Q}(q, q^2)$ における C の接線の交点を R とする。

着 眼

(1) で $\mathrm{R}\left(\dfrac{p+q}{2},\ pq\right)$ が出れば，あとはすべて解と係数の関係の問題になる。$\mathrm{R}(X, Y)$ とおけば $p+q=2X$，$pq=Y$ であり，p，q に課された条件を X，Y の条件に翻訳するだけである。

(2)(3) は条件が pq だけで書けるので Y が定数に定まる。このとき X が本当にすべての実数値をとるのかを確かめないと，軌跡が直線全体なのか一部なのかが決まらない。ここが (2)(3) の採点の分かれ目である。

(4) は条件が $p-q$ を含むので，$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq$ で X，Y に直す。最後に，得られた (X, Y) に対して実際に p，q が存在すること（逆の確認）を書く。

(1)　R の座標を p，q で表せ。

$y = x^2$ より $y' = 2x$ であるから，$\mathrm{P}(p, p^2)$ における接線は

$$y = 2p(x-p) + p^2 = 2px - p^2$$

であり，同様に Q における接線は $y = 2qx - q^2$ である。交点の x 座標は

$$2px - p^2 = 2qx - q^2 \iff 2(p-q)x = (p-q)(p+q)$$

から，$p \neq q$ より $x = \dfrac{p+q}{2}$ である。これを $y = 2px - p^2$ に代入すると

$$y = 2p \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 = p(p+q) - p^2 = pq$$

となる。

答：　$\underline{\underline{\mathrm{R}\left(\dfrac{p+q}{2},\ pq\right)}}$